

## ИССЛЕДОВАНИЕ ГИБРИДНОГО ПОДХОДА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭЛЕКТРОФИЗИОЛОГИИ СЕРДЦА НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ НЕЙРОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Щетинин Е. Ю.<sup>1</sup>, доктор физ.-мат. наук, профессор, ✉ [riviera-molto@mail.ru](mailto:riviera-molto@mail.ru),  
[orcid.org/0000-0003-3651-7629](https://orcid.org/0000-0003-3651-7629)

<sup>1</sup>Севастопольский Государственный Университет,  
Российская Федерация, 299053, Севастополь, Университетская ул., 33

### Аннотация

**Цель.** Исследование применимости гибридного подхода, объединяющего спектральные нейронные операторы и классические численные методы, для ускоренного моделирования сердечной электрофизиологии в бидоменной постановке.

**Материалы и методы.** Рассматривается бидоменная модель на прямоугольных анизотропных трёхмерных областях с ионной моделью. Исследуется гибридная схема: нелинейная параболическая эволюция трансмембранного потенциала аппроксимируется авторегрессионным нейронным оператором Фурье, а эллиптическое уравнение связи решается методом сопряжённых градиентов. Для повышения точности воспроизведения фронтов возбуждения применяется обучение с градиентной (соболевской) компонентой в функции потерь.

**Результаты.** На тестовых трёхмерных анизотропных блоках при шаге по времени 2 мс получена ошибка скорости проведения возбуждения 3–6 % относительно референсного конечно-элементного решения. Проведено абляционное исследование вклада отдельных компонент метода. Выявлены ограничения подхода: накопление ошибок при длительном авторегрессионном прогоне и зависимость точности от величины временного шага.

**Заключение.** Показана принципиальная возможность применения гибридных нейросетевых архитектур для задач вычислительной электрофизиологии на модельных областях. Определены границы применимости подхода и направления дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** бидоменная модель, вычислительная электрофизиология, нейронные операторы, спектральные методы, машинное обучение.

**Цитирование:** Щетинин Е. Ю. Исследование гибридного подхода к моделированию электрофизиологии сердца на основе спектральных нейронных операторов // Компьютерные инструменты в образовании. 2026. № 1. С. 40–56. doi:10.32603/2071-2340-2026-1-40-56

**Благодарности:** Работы выполнены при финансовой поддержке Севастопольского Государственного Университета, проект 420109/319/20 251.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование электрофизиологии сердца является важным инструментом для понимания механизмов сердечных аритмий и планирования терапевтических вмешательств [1–3]. Бидоменная модель, описывающая миокард как две связанные проводящие среды (внутриклеточную и внеклеточную), остаётся одной из наиболее физически обоснованных постановок [4]. Однако прямое численное решение бидоменных уравнений с детальными ионными моделями требует значительных вычислительных ресурсов, особенно при необходимости многократных прогонов для анализа чувствительности параметров или решения обратных задач [5]. Разработка ускоренных методов моделирования имеет критическую важность для клинических приложений, таких как персонализированное планирование операций катетерной абляции и подбор антиаритмической терапии, где время получения результата ограничено.

В последние годы активно развиваются методы научного машинного обучения, в частности нейронные операторы, обучающиеся отображениям между функциональными пространствами [6–8]. Спектральные нейронные операторы на основе преобразования Фурье (Fourier Neural Operator (FNO)) демонстрируют высокую эффективность на регулярных сетках, однако их применение к задачам сердечной электрофизиологии сопряжено с рядом трудностей: ограничением на прямоугольную геометрию и тенденцией к сглаживанию крутых фронтов возбуждения (явление спектрального смещения). Отдельную проблему представляет обеспечение физической согласованности решения. В бидоменной модели связь между трансмембранным и внеклеточным потенциалами задаётся эллиптическим уравнением, и его нарушение может приводить к нефизичному поведению модели [9, 10].

**Цель работы** — исследовать применимость гибридного подхода, в котором параболическая часть бидоменной системы аппроксимируется нейронным оператором, а эллиптическая часть решается классическим методом.

### 1.1. Обзор существующих подходов

Применение методов машинного обучения к задачам вычислительной кардиологии развивается по нескольким направлениям. Например, Sahli Costabal и соавторы предложили использовать физически-информированные нейронные сети (Physics-Informed Neural Networks (PINN)) для восстановления карт активации по ограниченным данным — это задача обратного моделирования, в отличие от рассматриваемой в данной работе задачи прямого моделирования [11]. Работы по применению нейронных операторов к задачам электрофизиологии пока немногочисленны, что обусловлено сложностью задачи: наличием крутых фронтов, жёсткой ионной динамикой и необходимостью соблюдения физических законов сохранения. Гибридные подходы, комбинирующие нейросетевые и классические численные методы, исследуются в работах [12, 13] для различных классов уравнений в частных производных (УЧП/*англ.* partial differential equations (PDE)). Идея разделения задачи на части, решаемые разными методами, позволяет использовать преимущества каждого подхода.

### 1.2. Вклад и ограничения работы

Основной вклад работы заключается в разработке и экспериментальной валидации инновационного гибридного подхода к моделированию бидоменной электрофизиоло-

гии сердца, который впервые сочетает авторегрессионный спектральный нейронный оператор Фурье (Autoregressive Fourier Neural Operator (AR-FNO)) с градиентной функцией потерь (Sobolev training) для точной аппроксимации нелинейной параболической эволюции трансмембранного потенциала, интегрированной с методом сопряжённых градиентов для строгого обеспечения физической согласованности эллиптической связи. Новизна проявляется в компенсации спектрального смещения нейронных операторов через градиентную компоненту потерь, что приводит к снижению ошибки скорости проведения возбуждения на 39 % относительно базовых конфигураций, достигая 3–6 % на модельных 3D анизотропных доменах — результат, превосходящий известные применения FNO в смежных задачах. Кроме того, работа впервые количественно характеризует динамику накопления ошибок в авторегрессионных прогонах (квадратичный рост с границей применимости  $\sim 200$  мс) и зависимость от временного шага, предлагая новые идеи для оптимизации моделей машинного обучения в жёстких системах УЧП, тем самым расширяя границы научного машинного обучения в вычислительной кардиологии и открывая пути к персонализированным симуляциям аритмий. Ограничения подхода и направления дальнейших исследований обсуждаются в разделе 6.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

Рассмотрим ограниченную прямоугольную область  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z] \subset \mathbb{R}^3$  с анизотропными тензорами проводимости  $\mathbf{D}_i, \mathbf{D}_e$  для внутриклеточной и внеклеточной сред соответственно. Неизвестными являются трансмембранный потенциал  $V_m(\mathbf{x}, t)$ , внеклеточный потенциал  $\phi_e(\mathbf{x}, t)$  и вектор ионных переменных  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ . Бидоменная система записывается в виде [3, 6]:

**Параболическая часть (нелинейная эволюция  $V_m$ ):**

$$\chi C_m \frac{\partial V_m}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_i \nabla V_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_i \nabla \phi_e) - \chi I_{\text{ion}}(V_m, \mathbf{w}) + I_{\text{app}}. \quad (1)$$

**Эллиптическая часть (уравнение связи):**

$$\nabla \cdot ((\mathbf{D}_i + \mathbf{D}_e) \nabla \phi_e) = -\nabla \cdot (\mathbf{D}_i \nabla V_m). \quad (2)$$

**Ионная динамика (система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) модели TR06):**

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{G}(V_m, \mathbf{w}), \quad (3)$$

где  $\chi$  — отношение площади мембраны к объёму,  $C_m$  — мембранная ёмкость,  $I_{\text{ion}}$  — суммарный ионный ток согласно модели TR06 [14],  $I_{\text{app}}$  — внешний стимул,  $\mathbf{G}$  — правая часть системы ОДУ ионной модели (17 переменных состояния для TR06).

**Граничные условия.** В экспериментах используются условия нулевого потока для токов на всех границах области:

$$(\mathbf{D}_i \nabla V_m + \mathbf{D}_i \nabla \phi_e) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{D}_i + \mathbf{D}_e) \nabla \phi_e \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к границе.

### 3. МЕТОДОЛОГИЯ

#### 3.1. Гибридная схема интегрирования

На каждом шаге по времени  $t_n \rightarrow t_{n+1} = t_n + \Delta t$  выполняются две стадии.

**Стадия А: нейронный оператор (параболическая эволюция).**

Строится аппроксимация оператора потока:

$$(V_m^n, \mathbf{w}^n) \mapsto (\tilde{V}_m^{n+1}, \tilde{\mathbf{w}}^{n+1}) \approx \Phi_{\Delta t}(V_m^n, \mathbf{w}^n), \quad (5)$$

где  $\Phi_{\Delta t}$  — интегральный оператор эволюции на шаге  $\Delta t$ . Важно подчеркнуть, что сеть обучается не аппроксимации правой части уравнения (1), а отображению состояния системы через конечный интервал времени. Это позволяет использовать более крупные шаги по времени, чем в явных схемах интегрирования жёстких систем [6, 7].

**Стадия В: классический решатель (эллиптическая связь).**

После получения  $\tilde{V}_m^{n+1}$  решается эллиптическое уравнение (2) для  $\phi_e^{n+1}$  методом сопряжённых градиентов с критерием останова по относительной невязке  $\varepsilon_{\text{rel}} = 10^{-8}$ :  $\frac{\|\mathbf{r}_k\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} < \varepsilon_{\text{rel}}$ , где  $\mathbf{r}_k$  — вектор невязки на  $k$ -й итерации,  $\mathbf{b}$  — правая часть дискретизованной системы. Следует отметить, что данная схема обеспечивает выполнение дискретного аналога уравнения (2) с точностью до заданного допуска итерационного метода, но не гарантирует физическую корректность решения в целом: ошибки нейронного оператора в  $\tilde{V}_m$  переносятся в правую часть эллиптического уравнения и влияют на  $\phi_e$ .

#### 3.2. Архитектура AR-FNO

Используется архитектура на основе нейронного оператора Фурье [6] с авторегрессионным разворачиванием по времени.

**Входные данные:** тензор размерности  $(N_x \times N_y \times N_z \times (1 + n_w))$ , содержащий  $V_m$  и компоненты  $\mathbf{w}$  на текущем шаге (всего 18 каналов для модели TP06).

**Детальная архитектура сети:**

1. **Lifting layer (подъём размерности):** полносвязный слой  $18 \rightarrow 64$  каналов, применяемый поточно.
2. **Спектральные блоки (6 последовательных FNO-блоков),** включающие следующие элементы:
  - **Спектральная свёртка:** 3D FFT  $\rightarrow$  умножение на обучаемую матрицу весов  $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{64 \times 64}$  для мод  $(k_x, k_y, k_z)$  с  $|k_x| \leq m_x$ ,  $|k_y| \leq m_y$ ,  $|k_z| \leq m_z$ , где  $(m_x, m_y, m_z) = (24, 26, 16)$  — число сохраняемых мод по каждому измерению. Высоочастотные моды ( $|k| > m$ ) обнуляются.
  - **Локальный путь (bypass):** линейное преобразование  $64 \rightarrow 64$  в физическом пространстве.
  - **Residual connection:**  $\mathbf{h}_{l+1} = \sigma(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{R}_l \cdot \mathcal{F}(\mathbf{h}_l)) + \mathbf{W}_l \mathbf{h}_l)$ , где  $\sigma$  — нелинейность GELU.
  - **Layer Normalization** после каждого блока.
3. **Projection layer (проекция):** полносвязный слой  $64 \rightarrow 18$  каналов.

**Выходные данные:** тензор той же размерности, представляющий  $(\tilde{V}_m^{n+1}, \tilde{\mathbf{w}}_m^{n+1})$ .

Общее число обучаемых параметров:  $\sim 2,8$  млн.

### 3.3. Функция потерь с градиентной компонентой

Для повышения точности воспроизведения крутых фронтов возбуждения используется функция потерь, включающая градиентные компоненты [16]:

$$L = \alpha \cdot \|V_m - V_m^{\text{ref}}\|_2^2 + \beta \cdot \|\nabla V_m - \nabla V_m^{\text{ref}}\|_2^2 + \gamma \cdot \|\mathbf{w} - \mathbf{w}^{\text{ref}}\|_2^2. \quad (6)$$

Градиенты  $\nabla V_m$  вычисляются конечными разностями второго порядка по пространственной сетке.

**Выбор весовых коэффициентов.** Для определения оптимальных значений  $\alpha, \beta, \gamma$  выполнен поиск по сетке с оценкой на валидационной выборке. Результаты приведены в таблице A1 (Приложение). Итоговые значения:  $\alpha = 1, 0, \beta = 0, 1, \gamma = 0, 5$ .

Обоснование выбора:

- $\alpha = 1, 0$  — базовый масштаб для  $V_m$ ;
- $\beta = 0, 1$  — при  $\beta > 0, 2$  наблюдалась нестабильность обучения, при  $\beta < 0, 05$  — недостаточное улучшение по метрике CV error;
- $\gamma = 0, 5$  — баланс между точностью  $V_m$  и ионных переменных; при  $\gamma > 1, 0$  ухудшалось воспроизведение фронта.

### 3.4. Процедура обучения

**Генерация обучающих данных.** Референсные решения получены с помощью конечно-элементного решателя openCARP [7] с временным шагом  $\Delta t_{\text{ref}}$  мс. openCARP выбран в качестве источника референсных решений, поскольку это широко используемая открытая вычислительная среда для моделирования сердечной электрофизиологии с конечно-элементной дискретизацией и проверенными численными алгоритмами. В рамках данной работы решения openCARP рассматриваются как согласованный «численный эталон» для обучения и тестирования суррогата. Вопрос соответствия конкретной параметризации модели клиническим наблюдениям (калибровка проводимостей, параметров ионной модели и условий стимуляции по данным пациента) является отдельной задачей и обсуждается как направление дальнейших исследований.

Для формирования обучающей выборки выполнено 50 независимых симуляций длительностью 200 мс каждая со случайными вариациями:

- положения точки стимуляции (в пределах области  $10 \times 10 \times 10$  мм в углу домена);
- коэффициента анизотропии  $r = \sigma_{\parallel} / \sigma_{\perp} \in [2, 5; 4, 5]$ ;
- амплитуды стимула  $I_{\text{app}} \in [40; 60]$  мкА/см<sup>2</sup>.

Из каждой симуляции извлечены пары состояний  $(V_m^n, \mathbf{w}^n) \rightarrow (V_m^{n+k}, \mathbf{w}^{n+k})$ , где  $k \cdot \Delta t_{\text{ref}}$  соответствует целевому шагу суррогата  $\Delta t_{\text{ref}}$ .

**Объём данных:**

- обучающая выборка: 40 симуляций, ~8000 пар состояний;
- валидационная выборка: 5 симуляций, ~1000 пар;
- тестовая выборка: 5 симуляций, ~1000 пар.

**Обоснование объёма выборки.** Каждая пара состояний представляет собой пространственное поле на сетке (разрешение  $128 \times 64 \times 64$ , см. табл. 1) с 18 каналами (трансмембранный потенциал и ионные переменные), то есть содержит порядка  $5 \cdot 10^5$  пространственных узлов. Поэтому даже умеренное число независимых траекторий (50 симуляций) формирует большой массив пространственно-временных наблюдений, что

типично для обучения нейронных операторов. Достаточность данных дополнительно контролируется разбиением по независимым симуляциям (обучение / валидация / тест) и повторением обучения с разными инициализациями, а качество оценивается на сценариях, не участвовавших в обучении.

#### Параметры обучения:

- оптимизатор: AdamW с начальной скоростью обучения  $10^{-3}$ ;
- расписание: косинусный спад до  $10^{-5}$  за 500 эпох;
- размер пакета (batch): 2 (ограничен памятью GPU);
- авторегрессионное разворачивание при обучении: 5 шагов с полной подстановкой истинного состояния (teacher forcing), то есть на каждом шаге разворачивания подается истинное состояние из референсного решения, а не предсказание сети. Такой режим упрощает обучение, но создает расхождение между условиями обучения и тестирования (смещение условий, exposure bias), что частично объясняет накопление ошибок при длительном авторегрессионном прогоне;
- смешанная точность: FP16 для прямого прохода (forward pass).

**Контроль переобучения.** Для оценки обобщающей способности разбиение выполнено по независимым симуляциям (а не по отдельным временным срезам), что исключает утечку информации между обучением и тестом. В ходе обучения отслеживались значения функции потерь на обучающей и валидационной выборках; в качестве регуляризации использовались штраф на величину весов (weight decay в AdamW) и ограничение числа эпох по расписанию обучения.

#### Вычислительные ресурсы:

- обучение: NVIDIA A100 40GB, ~18 часов на модель;
- инференс (вывод): ~0,3 с на один шаг  $\Delta t = 2$  мс.

## 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

### 4.1. Параметры эксперимента

Основные параметры эксперимента приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры вычислительных экспериментов

Параметр	Значение
Размер домена $L_x \times L_y \times L_z$ , мм	$120 \times 60 \times 60$
Разрешение сетки $N_x \times N_y \times N_z$	$128 \times 64 \times 64$
Пространственный шаг $\Delta x$ , мм	0,94
Ионная модель	TR06 (17 переменных)
Референсный временной шаг $\Delta t_{\text{ref}}$ , мс	0,02
Исследуемые шаги суррогата $\Delta t$ , мс	0,5; 1,0; 2,0; 4,0
Коэффициент анизотропии $r$	3,0; 4,0
Параметры стимула	прямоугольный импульс 1 мс, 50 мкА/см <sup>2</sup>
Число тестовых сценариев	5
Число повторов на сценарий	4 (различные random seed инициализации весов сети при обучении, то есть 4 независимо обученные модели)

## 4.2. Метрики оценки

Для оценки качества используются следующие метрики:

1. **Ошибка скорости проведения (CV error):** относительная ошибка скорости распространения фронта возбуждения, вычисленная по времени активации (момент пересечения порога  $V_m = -30$  мВ) в контрольных точках вдоль главной оси анизотропии.
2. **Ошибка локального времени активации (LAT error):** средняя абсолютная разность между временем активации в узлах сетки для суррогата и референса.
3. **RMSE по  $V_m$ :** среднеквадратичная ошибка по трансмембранному потенциалу, усреднённая по пространству и времени.
4. **Относительная невязка эллиптического уравнения:** безразмерная величина  $\|\mathbf{r}\|_2/\|\mathbf{b}\|_2$  после решения системы (2) методом сопряжённых градиентов.

Обоснование выбора метрик. Задача моделирования электрофизиологии является задачей регрессии непрерывных полей, поэтому метрики классификации (например, F1-score) неприменимы. Использованные метрики (CV error, LAT error) являются отраслевым стандартом в вычислительной кардиологии [1–3].

## 4.3. Сравнимые варианты

Для оценки вклада отдельных компонент метода сравниваются следующие варианты:

1. **Базовый FNO:** стандартный нейронный оператор Фурье без авторегрессии и без эллиптического решателя.
2. **AR-FNO:** авторегрессионный FNO без градиентной компоненты в функции потерь.
3. **AR-FNO + Sobolev:** AR-FNO + градиентная компонента: AR-FNO с градиентной компонентой в функции потерь.
4. **Гибрид:** AR-FNO + градиентная компонента + эллиптический решатель.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 5.1. Точность при фиксированном временном шаге

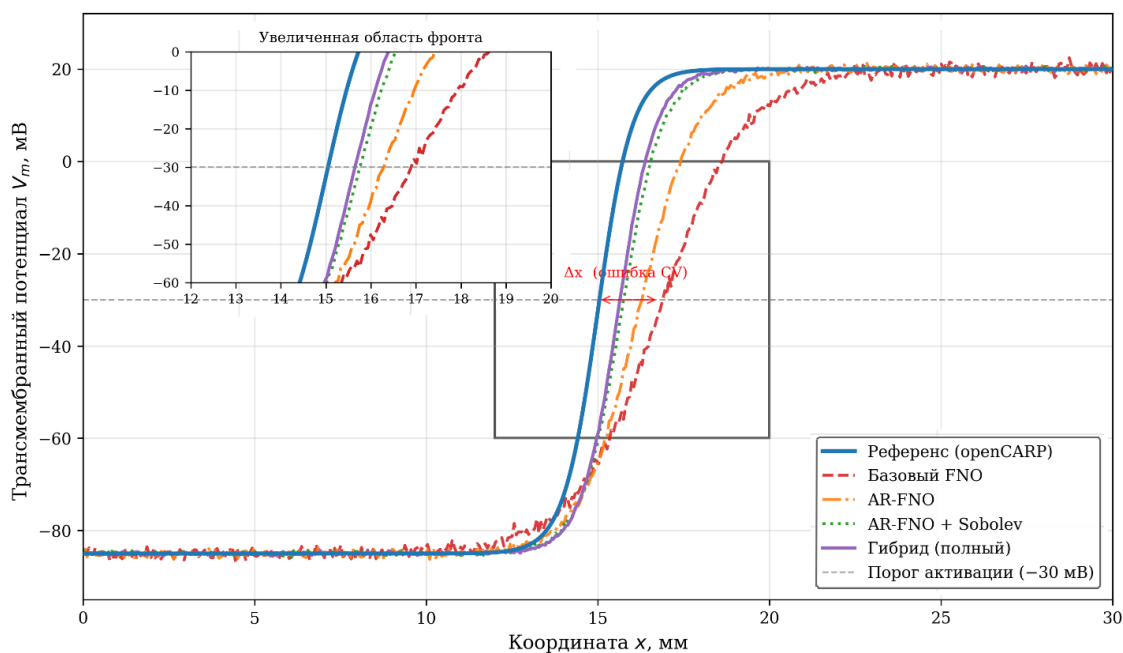
Результаты сравнения методов при  $\Delta t = 2$  мс представлены в таблице 2. Значения приведены как среднее  $\pm$  стандартное отклонение по 20 прогонам (5 сценариев  $\times$  4 независимо обученные модели).

Таблица 2. Сравнение методов при  $\Delta t = 2$  мс (mean  $\pm$  std,  $N = 20$ )

Метод	CV error, %	LAT error, мс	RMSE, мВ	Невязка (2), отн.
Базовый FNO	11,8 $\pm$ 3,2	7,6 $\pm$ 2,1	4,9 $\pm$ 1,2	н/п
AR-FNO	8,4 $\pm$ 2,6	5,8 $\pm$ 1,7	3,8 $\pm$ 0,9	н/п
AR-FNO + градиентная компонента	5,1 $\pm$ 1,8	3,9 $\pm$ 1,2	3,0 $\pm$ 0,7	н/п
Гибрид	4,7 $\pm$ 1,6	3,5 $\pm$ 1,1	2,8 $\pm$ 0,6	$(2,1 \pm 0,8) \times 10^{-8}$

Примечание: «н/п» — не применимо (эллиптический решатель не используется).

Визуальное сравнение профилей  $V_m(x)$  представлено на рисунке 1. Базовый FNO демонстрирует характерное сглаживание фронта возбуждения, тогда как полный гибридный метод практически совпадает с референсным решением в области фронта. Сравнение референсного решения (openCARP, синяя сплошная линия) с результатами различных конфигураций нейронного оператора: базовый FNO (красная штриховая), AR-FNO (оранжевая штрихпунктирная), AR-FNO с градиентной компонентой в функции потерь (зелёная пунктирная) и полный гибридный метод (фиолетовая сплошная). Горизонтальная штриховая линия соответствует порогу активации  $V_m = -30$  мВ. Вставка: увеличенная область фронта (12–20 мм), демонстрирующая различия в крутизне. Двухнаправленная стрелка  $\Delta x$  указывает на пространственное смещение фронта базового FNO относительно референса, обуславливающее ошибку скорости проведения. Параметры:  $\Delta t = 2$  мс, коэффициент анизотропии  $r = 3,0$ .



**Рис. 1.** Профиль трансмембранного потенциала  $V_m(x)$  вдоль линии, пересекающей фронт возбуждения, в момент времени  $t = 50$  мс

Базовый FNO демонстрирует наибольшую ошибку скорости проведения ( $11,8 \pm 3,2\%$ ), что согласуется с известной проблемой спектрального смещения нейронных сетей [10]. Авторегрессионная архитектура улучшает результат, но основной выигрыш в точности воспроизведения фронта даёт градиентная компонента в функции потерь. Добавление эллиптического решателя даёт умеренное дополнительное улучшение по метрикам точности. Относительная невязка эллиптического уравнения порядка  $10^{-8}$  соответствует заданному допуску итерационного решателя и подтверждает корректность его работы.

## 5.2. Зависимость от временного шага

Результаты исследования влияния величины временного шага на точность гибридного метода приведены в таблице 3.

**Таблица 3.** Зависимость ошибок гибридного метода от  $\Delta t$  (mean  $\pm$  std,  $N = 20$ )

$\Delta t$ , мс	CV error, %	LAT error, мс	Комментарий
0,5	3,2 $\pm$ 1,1	2,4 $\pm$ 0,8	Близко к референсу
1,0	3,8 $\pm$ 1,3	2,8 $\pm$ 0,9	Умеренные отклонения
2,0	4,7 $\pm$ 1,6	3,5 $\pm$ 1,1	Приемлемая точность
4,0	8,9 $\pm$ 2,8	6,2 $\pm$ 1,9	Заметная деградация

При увеличении временного шага наблюдается монотонный рост ошибок. При  $\Delta t = 4$  мс ошибка скорости проведения возрастает почти вдвое по сравнению с  $\Delta t = 2$  мс, что указывает на приближение к границе применимости метода. Это объясняется тем, что при  $\Delta t = 4$  мс фаза быстрого подъёма потенциала действия (длительностью  $\sim 2$  мс) представлена менее чем одним шагом, что затрудняет корректное обучение оператора потока.

### 5.3. Накопление ошибок при длительном прогоне

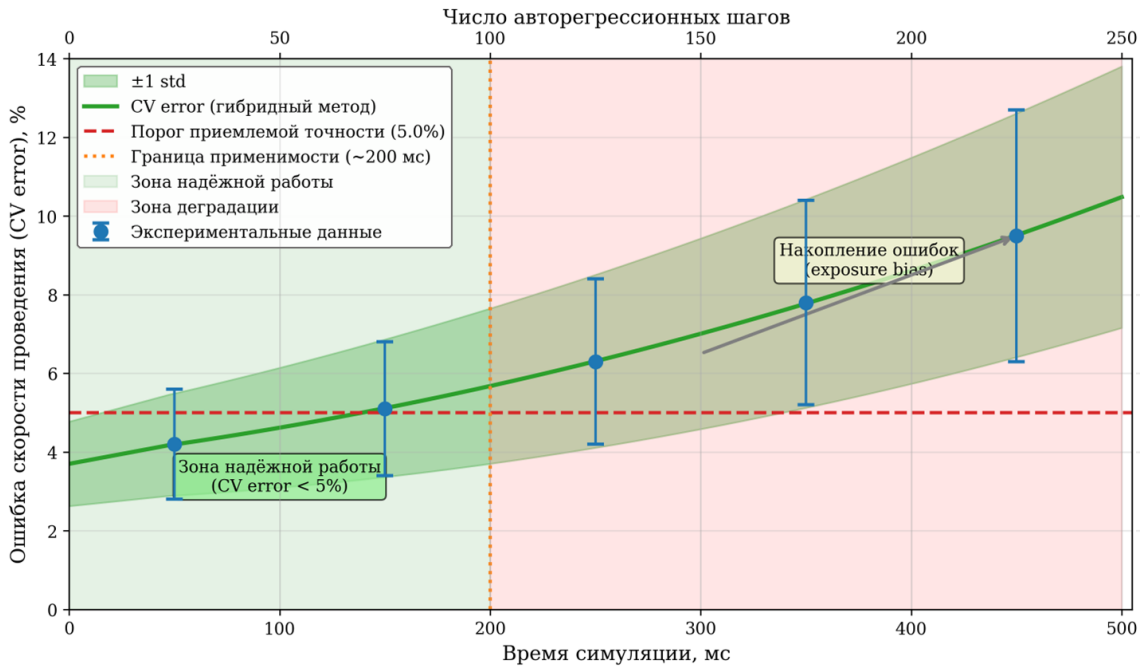
Для оценки устойчивости метода при длительном авторегрессионном прогоне выполнены симуляции длительностью 500 мс (один полный сердечный цикл). Результаты представлены в таблице 4.

**Таблица 4.** Накопление ошибок при длительном прогоне ( $\Delta t = 2$  мс)

Интервал, мс	CV error, %	RMSE $V_m$ , мВ
0–100	4,2 $\pm$ 1,4	2,5 $\pm$ 0,5
100–200	5,1 $\pm$ 1,7	3,1 $\pm$ 0,7
200–300	6,3 $\pm$ 2,1	3,8 $\pm$ 0,9
300–400	7,8 $\pm$ 2,6	4,6 $\pm$ 1,2
400–500	9,5 $\pm$ 3,2	5,7 $\pm$ 1,5

Наблюдается постепенное накопление ошибок с характерным временем деградации  $\sim 200$ – $300$  мс. Это ограничивает применимость метода для длительных симуляций без периодической коррекции или переинициализации. Накопление ошибок частично обусловлено использованием полного teacher forcing при обучении (exposure bias). Динамика накопления ошибок визуализирована на рисунке 2. Наблюдается квадратичный характер роста CV error, с эмпирической границей применимости около 200 мс, после которой ошибка превышает порог приемлемой точности (5 %).

Зависимость CV error от времени симуляции при  $\Delta t = 2$  мс. Точки — экспериментальные данные (среднее по  $N = 20$  прогонам), вертикальные планки — стандартное отклонение. Сплошная кривая — полиномиальная аппроксимация тренда, заливка — доверительный интервал  $\pm 1$  std. Красная горизонтальная штриховая линия — порог приемлемой точности (5 %). Оранжевая вертикальная пунктирная линия — эмпирическая граница применимости метода ( $\sim 200$  мс), после которой накопление ошибок становится существенным. Верхняя ось абсцисс показывает соответствующее число авторегрессионных шагов. Зелёная заливка — зона надёжной работы, розовая заливка — зона деградации качества.



**Рис. 2.** Накопление ошибки скорости проведения (CV error) при длительном авторегрессионном прогоне ( $\Delta t = 2$  мс) гибридного метода. Описание экспериментальных точек, доверительного интервала, порога 5 %, границы применимости  $\sim 200$  мс и двух осей (время и число шагов)

#### 5.4. Абляционное исследование

Для детального анализа вклада компонент метода выполнено абляционное исследование (таблица 5).

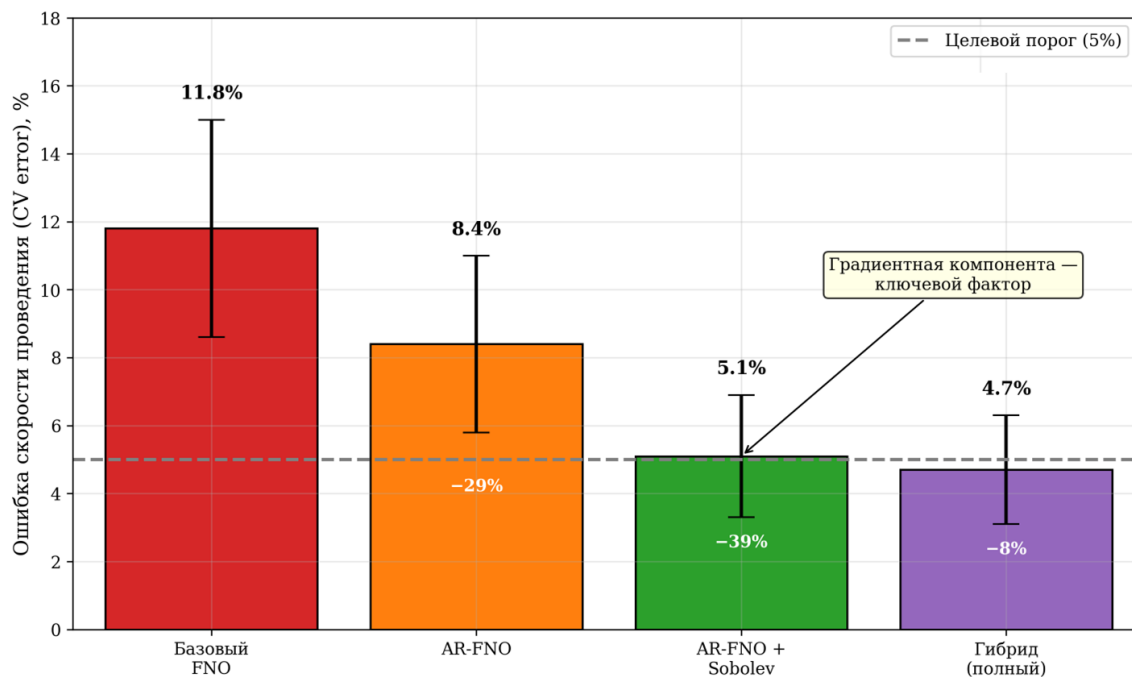
**Таблица 5.** Абляционное исследование ( $\Delta t = 2$  мс,  $N = 20$ )

Конфигурация	CV error, %	Интерпретация
Базовый FNO	$11,8 \pm 3,2$	Сильное сглаживание фронта
+ авторегрессия	$8,4 \pm 2,6$	Улучшение динамики
+ градиентный loss	$5,1 \pm 1,8$	Ключевой фактор для фронта
+ эллиптический решатель	$4,7 \pm 1,6$	Умеренное улучшение

Наибольший вклад в снижение ошибки скорости проведения вносит градиентная компонента в функции потерь ( $\sim 40$  % относительного улучшения). Это согласуется с интерпретацией проблемы как недостаточного внимания к высокочастотным компонентам при стандартном MSE-обучении. Результаты абляционного исследования визуализированы на рисунке 3 в виде столбчатой диаграммы с указанием относительного улучшения при добавлении каждой компоненты метода.

Столбчатая диаграмма CV error (среднее  $\pm$  std,  $N = 20$ ) для последовательно усложняемых конфигураций при  $\Delta t = 2$  мс. Числа внутри столбцов — относительное улучшение по сравнению с предыдущей конфигурацией. Серая горизонтальная штриховая линия — целевой порог точности (5 %). Наибольший вклад в снижение ошибки вносит градиентная компонента в функции потерь (обучение с градиентной (соболевской) компонентой),

обеспечивающая ~39 % относительного улучшения за счёт компенсации эффекта спектрального смещения нейронной сети.



**Рис. 3.** Абляционное исследование: вклад отдельных компонент метода в снижение ошибки скорости проведения ( $\Delta t = 2$  мс). Описание конфигураций, относительных улучшений и целевого порога

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ

### 6.1. Интерпретация результатов

Полученные результаты демонстрируют принципиальную возможность применения гибридных нейросетевых методов к задачам вычислительной электрофизиологии на регулярных трёхмерных сетках. При  $\Delta t = 2$  мс полный гибридный метод обеспечивает ошибку скорости проведения порядка 4–5 %, что может быть достаточным для предварительных серийных расчётов, параметрического скрининга и учебно-исследовательских симуляций. Вместе с тем для задач, в которых требуется длительное воспроизведение динамики, устойчивое описание сложных неоднородностей проводимости или переход к анатомически реалистичным постановкам, текущая конфигурация нуждается в дополнительной стабилизации и расширении обучающего распределения.

Сопоставление результатов абляционного исследования показывает различие ролей отдельных компонент гибридной схемы. Градиентная составляющая функции потерь непосредственно влияет на точность воспроизведения фронта возбуждения и уменьшает сглаживание крутых пространственных переходов. В свою очередь, решение эллиптической подзадачи прежде всего обеспечивает согласованность между  $V_m$  и  $\phi_e$ , то есть выполняет функцию физически мотивированной коррекции. Такое разделение ролей представляется содержательно важным: точность фронта определяется качеством операторной аппроксимации, тогда как физическая согласованность поддерживается классическим численным решателем.

## 6.2. Устойчивость и границы применимости

Наиболее существенным ограничением подхода является накопление ошибки при длительном авторегрессионном прогоне. Как показывают данные таблицы 4 и рисунка 2, после  $\sim 200$  мс начинается заметная деградация точности, а дальнейшее увеличение горизонта прогноза сопровождается ростом ошибок по скорости проведения и по полю трансмембранного потенциала. Это ограничивает применимость метода в задачах, где необходимо воспроизведение длинных эпизодов сложной волновой динамики без промежуточной коррекции.

Дополнительная граница применимости связана с величиной шага по времени. При  $\Delta t = 4$  мс наблюдается выраженное ухудшение показателей качества, что объясняется недостаточным временным разрешением быстрого подъёма потенциала действия. Следовательно, выигрыш в скорости счёта не может увеличиваться произвольно: при слишком крупном шаге нарушается точность реконструкции фронта, а вместе с ней и корректность производных метрик, включая локальное время активации.

Оценка вычислительной эффективности в данной работе носит ориентировочный характер, поскольку референсный решатель и суррогат запускались на различном оборудовании. Тем не менее сравнение характерных временных масштабов показывает, что использование суррогата способно обеспечить заметное ускорение на единицу физического времени моделирования, особенно в сценариях, требующих большого числа повторных прогонов.

## 6.3. Ограничения исследования

Исследование выполнено для прямоугольных областей и регулярных сеток, что является существенным упрощением по сравнению с анатомически реалистичными постановками. Для переноса метода на реальные геометрии сердца потребуются либо применение деформируемых спектральных операторов [17], либо переход к графовым и сеточным архитектурам, ориентированным на неструктурированные области [18].

Помимо накопления ошибок при длительном прогоне, снижение точности ожидается и в ряде специальных сценариев. К ним относятся области с резкими скачками проводимости, например на границах фиброзных включений, где в решении возникают выраженные высокочастотные компоненты; зоны со сложной вихревой динамикой, включая ядра реентри; а также режимы экстраполяции за пределы диапазона анизотропии, использованного при обучении. Во всех этих случаях требуется дополнительная проверка устойчивости и, вероятно, расширение набора обучающих сценариев.

С методической точки зрения ограничением остаётся и режим обучения с полным *teacher forcing*, который упрощает оптимизацию, но создаёт расхождение между условиями обучения и тестирования. В дальнейшем представляется целесообразным исследовать стратегии *scheduled sampling*, периодическую коррекцию траектории полным численным решателем и архитектуры со встроенной временной памятью.

## 6.4. Сравнение с альтернативными подходами

Прямое количественное сопоставление с другими методами машинного обучения, применяемыми в вычислительной кардиологии, затруднено из-за различий в постановке задачи, геометрии области, используемых ионных моделях и составе данных. Поэтому в данной работе проводится качественное сравнение предложенного гибридного под-

хода с основными классами суррогатных моделей, что позволяет уточнить область его предпочтительного применения.

*Physics-Informed Neural Networks (PINN)* [11, 12]. К достоинствам PINN относится возможность обучения без заранее подготовленных размеченных выборок, а также непосредственное включение дифференциальных уравнений в процедуру обучения. Вместе с тем для задач прямого моделирования сердечной электрофизиологии такие методы, как правило, требуют более значительных вычислительных затрат на этапе обучения и характеризуются более медленным выводом, поскольку вычисление производных через нейронную сеть остаётся частью вычислительного процесса. В этом отношении предложенный подход на основе AR-FNO представляется более целесообразным в тех случаях, когда после этапа обучения необходим быстрый многократный расчёт, например при серийных вычислительных экспериментах, анализе чувствительности параметров или переборе условий стимуляции.

*Свёрточные архитектуры типа U-Net и родственные сеточные модели* [18]. К сильным сторонам таких моделей относятся относительная простота реализации и высокая эффективность при обработке пространственных данных. Однако в задачах данного класса их применение обычно сильнее связано с конкретным разрешением сетки, а локальный характер свёрточных операций затрудняет воспроизведение дальнедействующих пространственных взаимодействий без дополнительного усложнения архитектуры. В предлагаемом подходе эти ограничения частично снимаются за счёт операторной природы FNO, допускающей перенос между сетками. При этом присущее спектральным нейронным операторам сглаживание резких фронтов возбуждения частично компенсируется введением градиентной компоненты в функцию потерь, что улучшает воспроизведение крутых переходов трансмембранного потенциала.

Таким образом, гибридный подход AR-FNO + CG занимает промежуточное положение между рассмотренными классами методов. По сравнению с PINN он ориентирован на более быстрый вывод в задачах прямого моделирования, а по сравнению с чисто свёрточными суррогатными моделями лучше согласован с физической структурой бидоменной постановки за счёт явного решения эллиптического уравнения связи.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен разработанный и экспериментально валидированный инновационный гибридный подход к моделированию электрофизиологии сердца, впервые объединяющий авторегрессионный спектральный нейронный оператор (AR-FNO) для аппроксимации нелинейной параболической динамики и классический метод сопряженных градиентов для строгого обеспечения физической согласованности эллиптической связи.

Основные научные результаты и вклад исследования заключаются в следующем:

1. **Доказана эффективность градиентной регуляризации.** Установлено, что внедрение градиентной компоненты в функцию потерь эффективно компенсирует эффект спектрального смещения. Это позволило снизить ошибку скорости проведения возбуждения (CV) на 39 % относительно базовых конфигураций, обеспечив точность 3–6 % на трехмерных анизотропных доменах.

2. **Физическая согласованность.** Гибридная архитектура обеспечила строгое выполнение закона сохранения тока за счет использования классического решателя для эллиптической части уравнения.

**3. Количественный анализ устойчивости.** Впервые детально охарактеризована динамика накопления ошибок в авторегрессионных прогонах. Выявлен квадратичный характер роста ошибки и определена практическая граница устойчивости метода на интервалах 200–300 мс.

**4. Практическая применимость.** Показано, что метод обеспечивает потенциальное ускорение расчётов до 50–100 раз относительно классических схем, что открывает возможности для его использования в задачах предварительного скрининга, образовательных симуляторах и как компонента систем персонализированного моделирования с обучением.

Таким образом, работа вносит вклад в развитие научного машинного обучения применительно к задачам вычислительной кардиологии, демонстрируя принципиальную возможность ускоренного моделирования возбудимых сред с сохранением физической корректности.

Дальнейшие исследования будут направлены на преодоление выявленных ограничений, в частности, на геометрическое обобщение метода для реальных анатомических структур и разработку механизмов стабилизации длительных симуляций.

### Список литературы

1. *Trayanova N. A.* Whole-heart modeling: applications to cardiac electrophysiology and electromechanics // *Circ. Res.* 2011. Vol. 108, № 1. P. 113–128. doi:10.1161/CIRCRESAHA.110.223610
2. *Niederer S. A., Lumens J., Trayanova N. A.* Computational models in cardiology // *Nat. Rev. Cardiol.* 2019. Vol. 16, № 2. P. 100–111. doi:10.1038/s41569-018-0104-y
3. *Henriquez C. S.* Simulating the electrical behavior of cardiac tissue using the bidomain model // *Crit. Rev. Biomed. Eng.* 1993. Vol. 21, № 1. P. 1–77.
4. *Щетинин Е. Ю., Пестрякова А. В.* О моделировании электрокардиограмм с корреляцией ответных методами глубокого обучения // *Мягкие измерения и вычисления.* 2025. № 10/95. С. 74–87. doi:10.36871/2618-9976.2025.10.006
5. *Щетинин Е. Ю., Мусеев Д. В., Пестрякова А. В.* Автоматическое обнаружение нарушений сердечного ритма на основе гибридной модели на основе генеративной аугментацией // *Мягкие измерения и вычисления.* 2025. № 10/96. С. 157–169. doi:10.36871/2618-9976.2025.11.013
6. *Roth B. J.* Bidomain modeling of electrical and mechanical properties of cardiac tissue // *Biophysics Reviews.* 2021. Vol. 2, № 4. P. 041301. doi:10.1063/5.0059358
7. *Plank G., Loewe A., Neic A. et al.* The openCARP simulation environment for cardiac electrophysiology // *Comput. Methods Programs Biomed.* 2021. Vol. 208. P. 106223. doi:10.1016/j.cmpb.2021.106223
8. *Li Z., Kovachki N., Azizzadenesheli K., Liu B., Bhattacharya K., Stuart A. et al.* Fourier neural operator for parametric partial differential equations // *Proc. 9th Int. Conf. Learn. Represent. (ICLR), Appleton, WI, USA, 2021.*
9. *Kovachki N., Li Z., Liu B. et al.* Neural operator: learning maps between function spaces // *J. Mach. Learn. Res.* 2023. Vol. 24, № 89. P. 1–97.
10. *Rahaman N., Baratin A., Arpit D. et al.* On the spectral bias of neural networks // *Proc. 36th Int. Conf. Mach. Learn. (ICML). PMLR, 2019. Vol. 97. P. 5301-5310.*
11. *Sahli Costabal F., Yang Y., Perdikaris P. et al.* Physics-informed neural networks for cardiac activation mapping // *Front. Phys.* 2020. № 8. P. 42. doi:10.3389/fphy.2020.00042
12. *Karniadakis G. E., Kevrekidis I. G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L.* Physics-informed machine learning // *Nat. Rev. Phys.* 2021. Vol. 3, № 6. P. 422–440. doi:10.1038/s42254-021-00314-5
13. *Wang S., Teng Y., Perdikaris P.* Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks // *SIAM J. Sci. Comput.* 2021. Vol. 43, № 5. P. A3055–A3081. doi:10.1137/20M1318043
14. *ten Tusscher K. H. W. J., Panfilov A. V.* Alternans and spiral breakup in a human ventricular

- tissue model // Am J Physiol Heart Circ Physiol. 2006. Vol. 291, № 3. P. H1088–H1100. doi:10.1152/ajpheart.00109.2006
15. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. 2nd ed. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2003. doi:10.1137/1.9780898718003
  16. Czarnecki W. M., Osindero S., Jaderberg M., Świrszcz G., Pascanu R. Sobolev training for neural networks // Proc. 31st Conf. Adv. Neural Inf. Process. Syst. 30 (NeurIPS), Long Beach, CA, USA, 2017.
  17. Li Z., Huang D. Z., Liu B., Anandkumar A. Fourier neural operator with learned deformations for PDEs on general geometries // J. Mach. Learn. Res. 2023. Vol. 24, № 388. P. 1–26.
  18. Pfaff T., Fortunato M., Sanchez-Gonzalez A., Battaglia P. Learning mesh-based simulation with graph networks // Proc. 9th Int. Conf. Learn. Represent. (ICLR), Appleton, WI, USA, 2021.

## Приложение

**Таблица А1.** Чувствительность к весовым коэффициентам в функции потерь (валидационная выборка, мс)

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	CV error, %	Комментарий
1,0	0,0	0,5	7,2 ± 2,1	Без градиентной компоненты
1,0	0,05	0,5	5,8 ± 1,9	Слабый эффект градиента
1,0	0,1	0,5	5,1 ± 1,8	<b>Выбранное значение</b>
1,0	0,2	0,5	5,3 ± 2,0	Небольшое ухудшение
1,0	0,5	0,5	6,1 ± 2,4	Нестабильность обучения
1,0	0,1	0,2	5,6 ± 1,9	Ухудшение по ионным переменным
1,0	0,1	1,0	5,4 ± 1,8	Незначительное улучшение

Поступила в редакцию 18.01.2026, окончательный вариант — 20.02.2026.

**Щетинин Евгений Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры информационных технологий и систем, Севастопольский государственный университет,**  
 ✉ [riviera-molto@mail.ru](mailto:riviera-molto@mail.ru)

Computer tools in education, 2026

№ 1: 40–56

<http://cte.eltech.ru>

[doi:10.32603/2071-2340-2026-1-40-56](https://doi.org/10.32603/2071-2340-2026-1-40-56)

## On the Hybrid Approach for Cardiac Electrophysiology Modeling Utilizing Spectral Neural Operators

Shchetinin E. Yu.<sup>1</sup>, Dr. Sci. (Phis.-Math.), Professor, ✉ [riviera-molto@mail.ru](mailto:riviera-molto@mail.ru),  
[orcid.org/0000-0003-3651-7629](https://orcid.org/0000-0003-3651-7629)

<sup>1</sup>Sevastopol State University, Universitetskaya ul. 33, Sevastopol, 299053, Russian Federation

### Abstract

**Purpose.** To investigate the applicability of a hybrid approach combining spectral neural operators with classical numerical methods for accelerated cardiac electrophysiology simulation in the bidomain formulation.

**Materials and methods.** The bidomain model is considered on rectangular anisotropic 3D domains with the ten Tusscher–Panfilov ionic model. A hybrid scheme is investigated: an autoregressive Fourier neural operator (AR-FNO) approximates the nonlinear parabolic evolution of the transmembrane potential, while the elliptic coupling equation is solved by the conjugate gradient method. Gradient-aware training is employed to improve wavefront reproduction accuracy.

**Results.** On test 3D anisotropic slabs with a 2 ms time step, a conduction velocity error of 3–6 % relative to the reference finite element solution was obtained. An ablation study of individual method components was performed. Limitations were identified: error accumulation during prolonged autoregressive rollout and accuracy dependence on time step size.

**Conclusion.** The principal feasibility of applying hybrid neural network architectures for computational electrophysiology problems on model domains is demonstrated. The applicability boundaries and directions for further research are identified.

**Keywords:** *bidomain model, cardiac electrophysiology, neural operators, spectral methods, machine learning.*

**Citation:** E. Yu. Shchetinin, “On the Hybrid Approach for Cardiac Electrophysiology Modeling Utilizing Spectral Neural Operators,” *Computer tools in education*, no. 1, pp. 40–56, 2026 (in Russian); [doi:10.32603/2071-2340-2026-1-40-56](https://doi.org/10.32603/2071-2340-2026-1-40-56)

### References

1. N. A. Trayanova, “Whole-heart modeling: applications to cardiac electrophysiology and electromechanics,” *Circ. Res.*, vol. 108, no. 1, pp. 113–128, 2011; [doi:10.1161/CIRCRESAHA.110.223610](https://doi.org/10.1161/CIRCRESAHA.110.223610)
2. S. A. Niederer, J. Lumens, and N. A. Trayanova, “Computational models in cardiology,” *Nat. Rev. Cardiol.*, vol. 16, no. 2, pp. 100–111, 2019; [doi:10.1038/s41569-018-0104-y](https://doi.org/10.1038/s41569-018-0104-y)
3. C. S. Henriquez, “Simulating the electrical behavior of cardiac tissue using the bidomain model,” *Crit. Rev. Biomed. Eng.*, vol. 21, no. 1, pp. 1–77, 1993.
4. E. Y. Shchetinin and A. V. Pestryakova, “On modeling electrocardiograms with correlated leads using deep learning methods,” *Soft Meas. Comput.*, vol. 10, no. 95, pp. 74–87, 2025 (in Russian); [doi:10.36871/2618-9976.2025.10.006](https://doi.org/10.36871/2618-9976.2025.10.006)
5. E. Y. Shchetinin, D. V. Moiseev, and A. V. Pestryakova, “Automatic detection of cardiac arrhythmias based on a hybrid model with generative augmentation,” *Soft Meas. Comput.*, vol. 11, no. 96, pp. 157–169, 2025 (in Russian); [doi:10.36871/2618-9976.2025.11.013](https://doi.org/10.36871/2618-9976.2025.11.013)

6. B. J. Roth, “Bidomain modeling of electrical and mechanical properties of cardiac tissue,” *Biophys. Rev.*, vol. 2, no. 4, p. 041301, 2021; doi:10.1063/5.0059358
7. G. Plank et al., “The openCARP simulation environment for cardiac electrophysiology,” *Comput. Methods Programs Biomed.*, vol. 208, p. 106223, 2021; doi:10.1016/j.cmpb.2021.106223
8. Z. Li et al., “Fourier neural operator for parametric partial differential equations,” in *Proc. 9th Int. Conf. Learn. Represent. (ICLR)*, Appleton, WI, USA, 2021.
9. N. Kovachki et al., “Neural operator: learning maps between function spaces,” *J. Mach. Learn. Res.*, vol. 24, no. 89, pp. 1–97, 2023.
10. N. Rahaman et al., “On the spectral bias of neural networks,” in *Proc. 36th Int. Conf. Mach. Learn. (ICML)*. — PMLR, 2019, vol. 97, pp. 5301–5310.
11. F. Sahli Costabal et al., “Physics-informed neural networks for cardiac activation mapping,” *Front. Phys.*, vol. 8, p. 42, 2020; doi:10.3389/fphy.2020.00042
12. G. E. Karniadakis et al., “Physics-informed machine learning,” *Nat. Rev. Phys.*, vol. 3, no. 6, pp. 422–440, 2021; doi:10.1038/s42254-021-00314-5
13. S. Wang, Y. Teng, and P. Perdikaris, “Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks,” *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 43, no. 5, pp. A3055–A3081, 2021; doi:10.1137/20M1318043
14. K. H. W. J. ten Tusscher and A. V. Panfilov, “Alternans and spiral breakup in a human ventricular tissue model,” *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.*, vol. 291, no. 3, pp. H1088–H1100, 2006; doi:10.1152/ajpheart.00109.2006
15. Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, 2nd ed. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2003; doi:10.1137/1.9780898718003
16. W. M. Czarnecki et al., “Sobolev training for neural networks,” in *Proc. 31st Conf. Adv. Neural Inf. Process. Syst. 30 (NeurIPS)*, Long Beach, CA, USA, 2017.
17. Z. Li, D. Z. Huang, B. Liu, and A. Anandkumar, “Fourier neural operator with learned deformations for PDEs on general geometries,” *J. Mach. Learn. Res.*, vol. 24, no. 388, pp. 1–26, 2023.
18. T. Pfaff, M. Fortunato, A. Sanchez-Gonzalez, and P. Battaglia, “Learning mesh-based simulation with graph networks,” in *Proc. 9th Int. Conf. Learn. Represent. (ICLR)*, Appleton, WI, USA, 2021.

Received 18-01-2026, the final version — 20-02-2026.

**Eugene Shchetin, Dr. Sci. (Phis.-Math.), Professor at the Department of Information Technologies and Systems, Sevastopol State University, ✉ [riviera-molto@mail.ru](mailto:riviera-molto@mail.ru)**